
ÍNDICE

PREFÁCIO	ix
I • ÁLGEBRA DOS COMPLEXOS	1
1 ÁLGEBRA DOS COMPLEXOS	3
1.1 O conjunto \mathbb{C} dos números complexos, suporte de um espaço vectorial real, com dimensão 2	5
1.1.1 Introdução	5
1.1.2 Dimensão	8
1.1.3 Norma no espaço vectorial \mathbb{C}	9
1.2 O conjunto \mathbb{C} como suporte de um corpo, extensão do corpo real \mathbb{R}	9
1.2.1 Introdução	9
1.2.2 O corpo \mathbb{C} como extensão do corpo \mathbb{R}	12
1.2.3 O corpo \mathbb{C} , como extensão do corpo \mathbb{R} , não pode ser ordenado	14
1.3 Representação geométrica. Forma trigonométrica. Radiciação	15
1.3.1 Introdução	15
1.3.2 Forma trigonométrica	18
1.4 As operações do espaço vectorial e do corpo \mathbb{C} no plano de Argand	31
1.5 Complexos conjugados. Propriedades e aplicações	37
1.5.1 Definição	37
1.5.2 Propriedades	37
1.5.3 Aplicações	39
1.6 Exercícios	41
II • ANÁLISE COMPLEXA	45
2 DIFERENCIAÇÃO	47
2.1 Topologia do espaço \mathbb{C} . Conjuntos particulares	49
2.1.1 Introdução	49
2.1.2 Sucessões e séries	51
2.1.3 Funções de \mathbb{R} em \mathbb{C} . Linhas de Jordan. Regiões simples e multiplamente conexas	55
2.2 Funções de variável complexa. Limite. Continuidade	61
2.2.1 Generalidades. Significado geométrico	61
2.2.2 Limite. Continuidade	66
2.3 Derivada num ponto. Diferenciabilidade e analiticidade. Significado geométrico	73
2.3.1 Derivada e diferencial	73
2.3.2 Significado geométrico local	75

ÍNDICE

2.3.3	Analiticidade. Transformação conforme	78
2.3.4	Derivadas de ordem superior à primeira	79
2.3.5	Equações de Cauchy-Riemann. Funções harmônicas em \mathbb{R}^2	79
2.4	Séries de potências. Funções transcendentais elementares	83
2.4.1	Séries de potências	83
2.4.2	A função exponencial	88
2.4.3	As funções hiperbólicas e circulares	91
2.5	Inversão de algumas funções elementares. Expressões multívocas. Pontos de ramificação e linhas de ramificação. Superfícies de Riemann	94
2.5.1	Alguns exemplos	94
2.5.2	Superfícies de Riemann	103
2.6	Pontos singulares	104
2.7	Exercícios	107
3	INTEGRAÇÃO	115
3.1	Definição e cálculo do integral	117
3.1.1	Introdução	117
3.1.2	Definição do integral. Propriedades	117
3.1.3	Cálculo do integral, por redução a integrais de Riemann	121
3.2	Teorema de Cauchy. Algumas consequências importantes	123
3.2.1	Teorema de Cauchy-Goursat	123
3.2.2	Algumas consequências imediatas	126
3.3	Fórmulas integrais de Cauchy. Consequências.	131
3.3.1	Fórmulas integrais de Cauchy	131
3.3.2	Consequências importantes das fórmulas integrais de Cauchy	134
3.4	Aplicação do Teorema dos Resíduos ao cálculo de certos integrais reais	146
3.4.1	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$	146
3.4.2	$\int_0^{2\pi} g(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) d\theta$	148
3.4.3	Lema de Jordan	150
3.4.4	Integrais que contêm ramos extraídos de expressões multívocas	153
3.5	Exercícios	157
4	DESENVOLVIMENTOS EM SÉRIE. PROLONGAMENTO ANALÍTICO	163
4.1	Desenvolvimento de Taylor	165
4.1.1	Teorema de Taylor	165
4.1.2	Alguns desenvolvimentos taylorianos	167
4.2	Desenvolvimento de Laurent	168
4.2.1	Teorema de Laurent	168
4.2.2	Zeros e singularidades. O ponto ∞	173
4.3	Prolongamento analítico	179

ÍNDICE

4.4	Exercícios	188
5	TRANSFORMAÇÃO CONFORME	191
5.1	Generalidades	193
5.1.1	Teorema da Aplicação de Riemann	194
5.1.2	Transformação de Schwarz-Christoffel	195
5.1.3	Transformação de fronteiras na forma paramétrica	196
5.1.4	Transformação de um semi-plano num círculo de raio 1	197
5.2	Algumas transformações elementares	197
5.2.1	Translação	197
5.2.2	Homotetia em relação à origem	198
5.2.3	Rotação em torno da origem	198
5.2.4	Transformação $w = az$	200
5.2.5	Transformação de semelhança	201
5.2.6	Inversão	202
5.3	A transformação de Möbius	208
5.4	O problema fundamental. Aplicações à Física	211
5.4.1	Introdução	211
5.4.2	Os problemas de Dirichlet e de Neumann no plano	212
5.4.3	Aplicação da teoria da transformação conforme à resolução do problema de Dirichlet	214
5.5	Tabela de transformações conformes de uso frequente	217
5.6	Exercícios	224
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	229