

## NÚMEROS

### RUI PALMA • NÚMEROS HIPER-REAIS

A ideia de infinitésimo tem influenciado o desenvolvimento da matemática desde há mais de 2000 anos e ainda hoje é frequentemente utilizada em física e engenharia. No entanto, este conceito foi sempre polémico, não fazendo parte da formulação usual (rigorosa!) da análise matemática. Contudo, durante os anos 60, Abraham Robinson trouxe o conceito de infinitésimo de volta à matemática, mostrando como se pode estender o sistema de números reais a um outro sistema de números, os números hiper-reais, de forma a incluir números infinitamente grandes e infinitesimais e onde continuam válidas as regras usuais do cálculo.

### ELOÍSA GRIFO • DA PLASTICINA ÀS EQUAÇÕES DE QUINTO GRAU

Porque é que existe uma fórmula resolvente para equações polinomiais de segundo, terceiro e quarto graus mas não de quinto? Algumas perguntas clássicas e que atormentaram cientistas durante vários séculos levaram os matemáticos do século XX a definir estruturas algébricas abstractas que de forma absolutamente espantosa permitem responder a esta e a muitas outras perguntas que nunca pensaríamos estar relacionadas. Começando com o que parecerá ser apenas uma pequena brincadeira com palitos e plasticina, convidamos o leitor a deixar-se envolver por estas criaturas míticas a que os matemáticos chamam grupos, anéis ou corpos.

### JOÃO MATIAS • A TABUADA DOS ALGÉBRICOS

É sabido que qualquer solução de uma equação linear com constantes inteiras é um número racional, no entanto quando consideramos equações polinomiais com coeficientes inteiros o conjunto dos números racionais não chega para cobrir todas as soluções. Estas soluções são chamadas números algébricos e serão o objecto de estudo deste artigo. Pelo meio, caracterizamos os corpos de números e a suas principais propriedades, dando exemplos de todas elas. Apresentamos ainda resultados sobre a factorização dos ideais dos conjuntos de inteiros algébricos, terminando com um resultado clássico, o Teorema de Kummer.

### LUÍS PEREIRA • NÚMEROS $p$ -ÁDICOS

Os números reais são construídos a partir de sucessões convergentes de números racionais. Usando uma noção diferente (mas razoável) de “sucessão convergente” no conjunto dos números racionais, obtêm-se de forma análoga os números  $p$ -ádicos, que aparecem naturalmente em muitas áreas da matemática. Neste artigo falamos desta construção dos números  $p$ -ádicos, de como se definem as operações aritméticas entre estes números, da invulgar topologia do seu conjunto (resultante da importante desigualdade ultramétrica), da analogia entre a análise  $p$ -ádica e a análise real, e de uma aplicação dos números  $p$ -ádicos à teoria de números, com uma breve discussão do princípio de Hasse.

### CLÁUDIA PASCOAL • ONDE ESTÁ O WALLY?

“Onde está o Wally?” Uma simples e pueril pergunta que nos faz viajar entre páginas de peripécias e aventuras em busca de uma personagem tão igual a si mesma e tão diferente de todas as outras, destacando-se, de alguma forma, dos restantes elementos que compõem a cena em estudo. Deparamo-nos assim com um exemplo que reflete a usual composição de um conjunto de dados: a maioria das observações que compõem uma amostra caracteriza o objeto de estudo em causa, podendo existir alguns elementos totalmente díspares e/ou diferentes destas observações. A estes elementos dá-se o nome de observações atípicas. A estatística robusta oferece uma solução para estes problemas, conduzindo a resultados fiáveis e credíveis. Este artigo resume alguns conceitos básicos de estatística robusta: a curva de sensibilidade e o ponto de rotura. Apresentam-se também alguns exemplos da sua aplicação.

### BRUNO COELHO • 1, 2, 3, . . . DIGA LÁ OUTRA VEZ

Supõe que estás num concurso e te são mostradas três portas idênticas. Atrás de uma delas está um carro e as outras duas escondem cabras. É-te pedido que escolhas uma das três portas. Depois disso o apresentador do concurso abre uma das restantes portas, revelando uma cabra, e oferece-te a possibilidade de mudares a tua escolha de porta. No final, o teu prémio será o que se encontra atrás da porta que escolheres. Que deves tu fazer para ganhar o carro? Este é o enunciado do Problema de Monty Hall. E o que fazer no caso dos Problemas de Monty Crawl, Monty Malevolent, Monty Past, Monty Bayes e Monty Progressive?

#### JOEL MOREIRA • USANDO PROBABILIDADES PARA APROXIMAR FUNÇÕES POR POLINÓMIOS

Uma ideia central em análise moderna é a de aproximar objetos potencialmente mal comportados por objetos simples. O Teorema de Weierstrass em aproximação é um teorema clássico em análise que permite aproximar funções contínuas uniformemente por polinómios. Neste artigo apresentamos uma demonstração deste teorema, de Bernstein, recorrendo a ferramentas da Teoria das Probabilidades, servindo também para ilustrar como essa teoria é utilizada em demonstrações intuitivas em análise.

#### LUÍS CRUZ-FILIFE • UMA FORMA DIFERENTE DE FAZER CONTAS

Para muitos matemáticos, a Matemática é fundamentalmente um jogo. Neste artigo, apresentamos exatamente isso—apenas um jogo, com regras extremamente simples, que se descobre afinal ser um modelo teórico do funcionamento de um computador tão válido como qualquer outro.

#### JOÃO GUERREIRO • PRIMOS EM PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Em 1837, Dirichlet provou que, se  $a$  e  $b$  são números naturais sem factores em comum, então a progressão aritmética  $a+b, 2a+b, 3a+b, \dots$  contém um número infinito de números primos, estendendo o resultado de Euclides sobre a infinitude dos números primos. Este facto permite compreender melhor as propriedades misteriosas dos números primos e a sua demonstração reúne ideias de álgebra, análise complexa e teoria de números.

#### JOÃO GOUVEIA • NÃO-NEGATIVIDADE, SOMAS DE QUADRADOS E OPTIMIZAÇÃO

Quando é que um polinómio é não-negativo? E quando é que o podemos escrever como uma soma de quadrados de outros polinómios? Perguntas como estas têm ocupado matemáticos desde Hilbert. Nos últimos anos, estas questões ganharam especial importância quando foi descoberto como se podiam utilizar eficientemente para encontrar mínimos de polinómios, permitindo inúmeras aplicações às mais diversas áreas. Este artigo pretende mostrar ao leitor uma breve história desta área, partindo dos resultados de Hilbert e viajando no tempo até às fronteiras atuais da investigação.

#### JORGE VITÓRIA • ALJAVAS, CAMINHOS E REPRESENTAÇÕES

Usando o surpreendente teorema de Gabriel como pano de fundo, apresentamos ao leitor uma importante classe de álgebras na teoria de representações: as álgebras de caminhos. Expomos o teorema de Gabriel que classifica as álgebras de caminhos de tipo de representação finito em termos dos diagramas de Dynkin  $A, D$  e  $E$  e por fim discutimos o conceito de tipo de representação (finito, domesticado ou selvagem) para álgebras de caminhos sobre aljavas finitas.

### CIRURGIAS

#### DAVID MESQUITA • TRIÂNGULOS, BOLAS E UM TEOREMA

Partindo de um resultado de natureza combinatória, o Lema de Sperner, veremos como foi demonstrado um dos mais célebres teoremas da topologia dos espaços  $\mathbf{R}^n$ , o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, e alguns resultados que lhe estão relacionados. Por entre passeios

coloridos, levaremos o leitor, numa breve viagem, ao mundo dos pontos fixos.

#### RICARDO LOURA • PARA LÁ DAS FUNÇÕES

Em meados do século XX, ficou claro que, do ponto de vista matemático, não estava bem definido o conceito de delta de Dirac, há muito usado pelos físicos de forma informal. Em particular para resolver este problema, Laurent Schwartz propôs uma generalização do conceito de função, noção a que agora se chama *distribuição*. As próximas páginas são dedicadas à motivação e introdução deste conceito, partindo de um problema físico simples.

#### LUÍS DIOGO • CIRURGIAS GEOMÉTRICAS

É um facto familiar que equações polinomiais em  $x$  e  $y$ , como  $x^2 + y^2 = 1$ , representam curvas no plano. Por outro lado, é incomum fazer-se a observação que, para  $x, y$  complexos, estas equações nos dão superfícies em  $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ . O que podemos dizer sobre estas superfícies? Neste artigo veremos que são exemplos importantes de espaços semelhantes ao plano complexo, as superfícies de Riemann.

#### JORGE MIRANDA • POLINÓMIOS E SUPERFÍCIES

É um facto familiar que equações polinomiais em  $x$  e  $y$ , como  $x^2 + y^2 = 1$ , representam curvas no plano. Por outro lado, é incomum fazer-se a observação que para  $x, y$  complexos estas equações nos dão superfícies em  $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ . O que podemos dizer sobre estas superfícies? Neste artigo veremos que são exemplos importantes de espaços semelhantes ao plano complexo, as superfícies de Riemann.

#### JOÃO NUNO MESTRE • O PRINCÍPIO DO CAMELO SIMPLÉCTICO

A geometria euclídea é apenas uma das muitas maneiras de encarar a geometria, quer no plano, quer em espaços mais gerais. Neste artigo vamos explorar as noções básicas da geometria simpléctica, através da comparação com as geometrias euclídea e riemanniana, e tentar entender como por vezes a geometria simpléctica parece flexível, e outras vezes rígida. Por fim, apresentamos o teorema de não-esborrachamento de Gromov, também conhecido por princípio do camelo simpléctico, que revolucionou a geometria simpléctica pelas técnicas sofisticadas que nela introduziu.

#### TIAGO SALVADOR • CURVAS ELÍPTICAS

O objectivo deste artigo é dar a conhecer as curvas elípticas e algumas das suas propriedades e aplicações. Na primeira parte, veremos como definir uma operação de soma de pontos na curva elíptica e que a curva elíptica munida desta operação constitui um grupo abeliano, uma estrutura com propriedades interessantes. Na segunda parte, concentraremos a nossa atenção nas curvas elípticas sobre corpos finitos, concluindo com a estimativa do seu número de pontos, dada pelo Teorema de Hasse.

#### PATRÍCIA ENGRÁCIA • INTERLÚDIO SOBRE INTEGRAIS DE LINHA E DE SUPERFÍCIE

Este artigo tem como objectivo dar uma visão intuitiva do conceito de integral de linha e de superfície. Começamos por introduzir de maneira breve a noção de integrais em  $\mathbb{R}$  e em  $\mathbb{R}^n$ , para contextualizar. Culminamos com a apresentação das versões generalizadas do Teorema Fundamental do Cálculo para integrais múltiplos: os Teoremas da Divergência, de Green e de Stokes.

#### ALEXANDRA BUGALHO DE MOURA • MODELOS MATEMÁTICOS, SIMULAÇÃO NUMÉRICA E REALIDADE

Muitos fenómenos da vida real podem ser traduzidos em modelos matemáticos. Estes envolvem equações cuja solução descreve o fenómeno real, permitindo entendê-lo e até nalguns casos controlá-lo. O problema é que os modelos matemáticos envolvem normalmente equações diferenciais muito difíceis de resolver, sendo necessário recorrer a

métodos numéricos sofisticados, para passar do infinito ao finito, permitindo assim o uso dos computadores e a obtenção das famosas simulações computacionais. Vamos ver como a matemática está por trás do nosso entendimento dos fenómenos reais, apresentando um modelo com aplicações ao estudo de alguns problemas em medicina. Vamos também introduzir um dos métodos numéricos mais engenhosos e populares, o Método dos Elementos Finitos, a fim de obter soluções numéricas para problemas reais.

#### PEDRO SERRANHO • MATEMÁTICA APLICADA AO ESTUDO DA VISÃO

Neste texto pretendemos ilustrar algumas aplicações de matemática no campo da medicina, nomeadamente na imagiologia do fundo ocular. Vamos enumerar algumas técnicas, problemas atuais e em aberto nos quais a Matemática pode ser útil.

#### DIOGO OLIVEIRA E SILVA • O QUE É UM CÍRCULO?

De todas as curvas fechadas com um determinado comprimento, a circunferência é aquela que delimita a maior área. Porquê? Uma viagem pelo mundo das desigualdades geométricas responde à pergunta e revela como estender esta ideia a dimensões mais elevadas.

#### NÓS DE GRAVATA

##### PEDRO GONÇALVES • SUIT UP! (OU COMO DEIXEI DE ME PREOCUPAR E COMECEI A USAR GRAVATAS)

Dar um nó numa gravata não é apenas uma questão de arte; é também uma questão de ciência. De facto, é possível relacionar nós de gravata com passeios aleatórios e chegar à surpreendente conclusão de que existem 85 nós de gravata.

#### GONÇALO SIMÕES • PAVIMENTAÇÕES DE PENROSE

Desde que o Homem existe que se impressiona com o que o rodeia e procura descrever a beleza da Natureza por representações geométricas. Ao longo dos séculos pintores, escultores e até mesmo matemáticos tentaram descobrir novas formas de o fazer. Entre essas descobertas estão as pavimentações de Penrose. Parecendo completamente caóticas ao princípio, depressa se percebe que apresentam uma certa ordem, até que no final nos deixamos maravilhar pela sua beleza.

#### PEDRO SOUSA VIEIRA • PASSEIOS ALEATÓRIOS EM RETICULADOS

Uma molécula que se move num fluido, o percurso de um animal em busca de comida, a propagação de um fogo florestal, o preço de uma acção flutuante—como estudá-los? Todos estes exemplos podem ser modelados por um objecto matemático denominado de passeio aleatório. Neste artigo introduzirei ao leitor a noção de passeio aleatório assim como algumas das suas muitas aplicações possíveis e apresentarei alguns exemplos muito estudados de passeios aleatórios em reticulados.

#### RUBEN MARTINS E ANA GRAÇA • SATISFAÇÃO E OPTIMIZAÇÃO BOOLEANA: JOGOS, PUZZLES E GENÉTICA

Como escolher alguns amigos para jantar? Qual a solução daqueles problemas de Sudoku que nos quebram a cabeça? Conseguiremos resolver o complicado puzzle das Torres de Hanói?

Como separar a informação genética que herdamos dos nossos pais? Este artigo explica como satisfação (SAT) e optimização Booleanas podem ser usadas para modelar diversos problemas “difíceis” reais; descreve ainda a importância de SAT para a teoria da complexidade. Será o leitor capaz de resolver um dos *Millennium Prize Problems*?

#### BRUNO CONCHINHA • $P = NP$

Neste artigo apresentamos aquele que é provavelmente o mais importante e célebre problema em aberto em Teoria da Computação: decidir se  $P = ? NP$ , ou, por outras palavras, decidir se qualquer problema cujas soluções podem ser verificadas de forma eficiente pode

também ser resolvido eficientemente.

Pelo caminho apresentamos as célebres máquinas de Turing, um dos primeiros modelos teóricos percursoros do computador atual, e a noção de complexidade computacional. Introduzimos ainda a forma teórica de medir a eficiência de um algoritmo e a dificuldade de um problema.

Concluimos o artigo discutindo algumas das consequências (científicas e filosóficas) de cada uma das respostas possíveis a esta questão e o que a comunidade científica tem a dizer sobre ela.

#### PEDRO ADÃO • AFINAL A CRIPTOGRAFIA É (QUASE) PERFEITA

Motivado pela constante informatização da nossa sociedade, a Criptografia ganhou uma importância fundamental nas duas últimas décadas. A simples consulta diária do nosso e-mail ou da nossa conta em redes sociais está protegida por complexos protocolos criptográficos que impedem que um utilizador mal intencionado capture a nossa *password*. Aquilo que outrora era apenas do domínio militar tornou-se de utilização pública e ao alcance de todos. No entanto, quais as garantias que nos são dadas pelos protocolos existentes? Podemos ter a certeza que a nossa *password* enviada pela Internet nunca será descoberta? Será de facto a Criptografia perfeita? Infelizmente não o é pois é sempre possível adivinhar a *password* de alguém à sorte. No entanto, como veremos neste artigo, a Criptografia actual aproxima-se muito da perfeição.

#### DIOGO POÇAS • TESTES DE PRIMALIDADE

Este é um artigo sobre números primos. Os números primos são um dos assuntos mais extensos e mais complexos de toda a Matemática. Embora o conceito de número primo seja simples e já muito antigo, o impacto que os números primos ainda têm hoje em dia é extraordinário. Atualmente os números primos são usados em várias áreas, como na criptografia de chave pública, onde se toma partido da dificuldade existente em factorizar um número grande, na geração de códigos com dígitos de controlo (como o código ISBN) e em geradores de números pseudoaleatórios. Um dos principais problemas relacionados com os números primos é o problema da primalidade. O problema pode ser enunciado assim: Dado um número  $n$ , será  $n$  primo? Haverá uma maneira “eficiente” de responder a essa pergunta? Neste artigo vamos investigar dois testes de primalidade, o teste de Miller–Rabin e o teste AKS. Vamos apresentar os respectivos algoritmos em pseudo-código, e discutir questões de eficiência relativamente aos mesmos.

#### LUÍS FILIPE GIL • UMA BREVE INTRODUÇÃO À COMPUTABILIDADE

A Computabilidade é uma disciplina das Ciências da Computação que tem como objectivo estudar que problemas podem ou não ser resolvidos por um computador e classificá-los em categorias de acordo com o seu grau de decidibilidade. Este artigo apresenta de uma forma sucinta as principais classes de problemas, os resultados teóricos associados às mesmas e o significado destes.

#### HÉLIO PAIS • POPULAÇÕES EM JOGO: O CRESCIMENTO POPULACIONAL NA MIRA DA TEORIA DE JOGOS

O estudo de populações tem inúmeras aplicações tanto em ciências sociais e humanas como em ciências biológicas. É possível construir modelos abstractos cujo uso pode ser generalizado usando conceitos matemáticos. Neste artigo apresentamos alguns modelos mais simples, tirando partido, em particular, de equações diferenciais e teoria de jogos. As primeiras como meio de representar o crescimento de populações, a segunda como forma de inclusão de factores de interacção entre diferentes populações.

#### HUGO TAVARES • UM MODELO DE COMPETIÇÃO ENTRE ESPÉCIES

Neste artigo vamos deduzir um sistema de equações diferenciais que modela o fenómeno de competição entre espécies diferentes. De seguida, vamos usá-lo para tentar perceber que consequências tem um aumento drástico da competição na distribuição dos indivíduos num território. Parte dos resultados aqui apresentados foram obtidos pelo autor durante o seu doutoramento.

#### ANDRÉ F. VASCONCELOS • A VOLTA AO MUNDO EM 90 MINUTOS

Hoje em dia, uma série de satélites de origem artificial orbita a Terra. Por sua vez, a Terra e

os planetas do Sistema Solar orbitam o Sol. Depois ainda temos as luas, os cometas, os asteróides. . . na verdade, como é que tudo isto funciona? Existe alguma regra ou lei que dite como um corpo se mexe no espaço? Neste texto veremos que sim, graças às Leis de Kepler e à Lei da Gravitação de Newton. Veremos também quais são as consequências em termos práticos de cada uma destas leis e ainda como podem ser aplicadas a casos bastante concretos.

#### ANA KNOPFLI • PROBLEMA RESTRITO DOS TRÊS CORPOS

Suponha que quer estudar o movimento da Lua e da Terra. Através das equações do movimento de cada um destes corpos celestes consegue obter a solução exacta das suas órbitas. Porém, basta que se considere um sistema com apenas mais um corpo para que a situação se complique, e não haja possibilidade de obter soluções exactas para as suas órbitas, podendo até surgir movimentos caóticos. . . O problema restrito dos três corpos é um problema inspirado na astronomia que estuda o movimento de uma partícula de massa desprezável no campo gravitacional de dois corpos que interagem entre si.

#### JOÃO PEDRO BOAVIDA • SIMETRIAS, ÁLGEBRA LINEAR E O ÁTOMO DE HIDROGÉNIO

As funções pares e ímpares são um exemplo em que a simetria ajuda a descrever as funções definidas num conjunto: o conjunto é a recta real e a simetria em causa é a reflexão na origem. O nosso objectivo é ver onde essa ideia nos leva no caso em que as simetrias são as rotações ao longo de uma superfície esférica. Para tal, usamos a multiplicação de matrizes e vemos o que são vectores próprios. Surpreendentemente, são eles a chave para perceber as funções definidas numa superfície esférica e as orbitais do átomo de hidrogénio.